Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Pro gradu -tutkielma

Parakompakti avaruus

Ruut Vihma-Crippa

Ohjaajat: Erik Elfving ja Hannu Honkasalo 14.9.2019

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Ruut Vihma-Crippa

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Parakompakti avaruus

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Syyskuu 2019	37 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tutkielman aiheena ovat parakompaktit avaruudet. Työn tarkoituksena on esittää tämän avaruuksien luokan ominaisuuksia sekä näyttää parakompaktiuden tärkeys yleisessä topologiassa.

Parakompaktin avaruuden käsitteen otti ensimmäisenä käyttöön ranskalainen matemaatikko Jean Dieudonné vuonna 1944. Avaruus X on parakompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on lokaalisti äärellinen avoin tihennys.

Työn alussa kerrataan käsitteitä, joita tullaan tulevissa lauseissa ja määritelmissä tarvitsemaan. Näitä ovat esimerkiksi kompaktius, tihennys ja lokaalinen äärellisyys. Luvun 3 alussa annetaan parakompaktin avaruuden määritelmä ja näytetään parakompaktin avaruuden yhteys muihin avaruuksien luokkiin sekä todistetaan sen tärkeimpiä ominaisuuksia. Osoitetaan esimerkiksi, että jokainen kompakti avaruus on parakompakti ja että jokainen parakompakti Hausdorffin avaruus on normaali. Perusominaisuuksista näytetään muun muassa, että parakompaktin avaruuden suljettu osajoukko on parakompakti, mutta parakompaktien avaruuksien tulo ei sitä välttämättä ole. Luvun 4 tarkoitus on osoittaa A.H. Stonen vuonna 1948 todistama lause joka näyttää, että jokainen metristyvä avaruus on parakompakti. Stonen lause lisäsi parakompaktiuden suosiota ja merkitystä huomattavasti ja siitä tuli pian yksi yleisen topologian tärkeistä käsitteistä, metristyvyyden ja kompaktiuden ohella.

Hyvin tärkeä parakompaktin Hausdorffin avaruuden ominaisuus on avoimiin peitteisiin sopivien ykkösen ositusten olemassaolo. Tätä käsittelee luku 6. Lisäksi työssä näytetään, että jokainen säännöllinen Lindelöfin avaruus on parakompakti ja tutkitaan parakompaktin avaruuden yhteyttä kahteen tihennystyyppiin, barysentriseen tihennykseen ja tähtitihennykseen, jotka eivät välttämättä ole lokaalisti äärellisiä. Viimeisessä luvussa osoitetaan vielä, että parakompaktius säilyy jatkuvassa, suljetussa surjektiossa.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

parakompakti avaruus, lokaalinen äärellisyys, tihennys, ykkösen ositus

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto **2**

2 Kertausta **4**

3 Parakompakti avaruus **6**

4 Metristyvä avaruus ja parakompaktius **12**

5 Lindelöfin avaruus **20**

6 Ykkösen ositus **21**

7 Barysentrinen tihennys ja tähtitihennys **26**

8 Parakompaktiuden säilyvyys suljetussa kuvauksessa **33**

Luku 1

Johdanto

Parakompaktin avaruuden käsitteen otti ensimmäisenä käyttöön ranskalainen matemaatikko Jean Dieudonné vuonna 1944. Hän määritteli tämän kompaktin avaruuden hyvin hyödyllisen yleistyksen, joka on tarpeeksi rajaava säilyttääkseen monta kompaktin avaruuden ominaisuutta, mutta joka on samalla sen verran yleinen, että tämä parakompaktien avaruuksien luokka jää melko laajaksi. Muutamaa vuotta myöhemmin, vuonna 1948, brittiläinen matemaatikko A. H. Stone todisti, että jokainen metristyvä avaruus on parakompakti. Tämä lisäsi parakompaktiuden käsitteen suosiota huimasti. Sen avulla saatiin nimittäin yleistettyä lukuisia topologian ja analyysin tuloksia, sekä yksinkertaistettua monia todistuksia. Kyseessä on siis erittäin hyödyllinen avaruuksien luokka, joka sisältää sekä kompaktit että metristyvät avaruudet. Nykypäivänäkin parakompaktius on (kompaktiuden ja metristyvyyden ohella) yksi yleisen topologian tärkeistä käsitteistä.

Tämä tutkielma lähtee liikkeelle kertaamalla jatkon kannalta tärkeitä käsitteitä. Näitä ovat muun muassa peite, tihennys, kompaktius ja lokaalinen äärellisyys. Luku kolme esittää parakompaktin avaruuden määritelmän, sekä tämän tärkeitä ominaisuuksia esimerkkien ja lauseiden avulla. Näytetään esimerkiksi, että jokainen kompakti avaruus on parakompakti ja että jokainen parakompakti Hausdorffin avaruus on normaali. Samoin todistetaan, että parakompaktin avaruuden suljettu osajoukko on parakompakti.

Luvun neljä keskipisteenä on edellä jo mainittu A. H. Stonen metristyvyyslause, jota ennen todistetaan E. Michaelin lemma, joka sekin on hyvin tärkeä jatkon kannalta.

Suomalaisesta näkökulmasta katsottuna, luvun 5 aihe on hyvin mielenkiintoinen. Lindelöfin avaruus on saanut nimensä suomalaisen matemaatikon mukaan ja luvussa näytetään, että jokainen säännöllinen Lindelöfin avaruus on parakompakti.

Yksi parakompaktin Hausdorffin avaruuden tärkeimmistä ominaisuuksista on avoimiin peitteisiin sopivien ykkösen ositusten olemassaolo. Ykkösen ositus on hyvin kätevä, kun halutaan laajentaa tunnettu, lokaali ominaisuus koko avaruuteen. Avaruuden parakompaktius on välttämätön ehto ykkösen osituksen olemassaololle. Juuri tämä todistetaan luvussa 6.

Luvussa 7 tutustutaan kahteen tihennystyyppiin, barysentriseen tihennykseen ja tähtitihennykseen, jotka eivät välttämättä ole lokaalisti äärellisiä ja tarkastellaan parakompaktiutta ottaen ne lähtökohdaksi. Näytetään, että barysentrisen tihennyksen barysentrinen tihennys on tähtitihennys sekä todistetaan lause, jonka mukaan normaalin avaruuden lokaalisti äärellisellä avoimella peitteellä on olemassa avoin barysentrinen tihennys. Näistä lauseista seuraa, että parakompaktin avaruuden jokaisella avoimella peitteellä on sekä avoin barysentrinen tihennys että avoin tähtitihennys. Tärkeämpää vielä on, että tämä pätee kaikille T_1-avaruuksille. Eli T_1-avaruus on parakompakti Hausdorffin avaruus, jos ja vain jos sen jokaisella avoimella peitteellä on avoin barysentrinen tihennys/tähtitihennys. Tämä todistetaan lauseessa 16 sekä seurauksessa 17.

Viimeisessä luvussa näytetään vielä, että parakompaktius säilyy jatkuvassa, suljetussa surjektiossa. Tämän todisti E. Michael julkaisussaan "Another note on paracompact spaces" [4].

Pääasiallisina lähteinä tässä työssä on käytetty J. Dugundjin [1], J. R. Munkresin [5] sekä S. Willardin [9] teoksia. Jussi Väisälän kirjan [8] tiedot oletetaan suurimmaksi osaksi tunnetuiksi.

Luku 2

Kertausta

Ennen varsinaiseen aiheeseen pääsemistä, käydään kertauksen vuoksi läpi muutamia käsitteitä, jotka tulevat esiintymään useasti jatkossa. Näitä ovat esimerkiksi peite ja tihennys, mutta myös lokaalinen äärellisyys, pisteäärellisyys sekä kompakti avaruus. (Väisälä [8])

Ympäristö. Olkoon X topologinen avaruus, $x \in X$ ja $A \subset X$. Jos $x \in U \subset X$, missä U on avaruuden X avoin osajoukko, niin U on *pisteen x ympäristö*. Jos taas $A \subset U \subset X$ ja $U \subset X$ on avoin, niin U on *joukon A ympäristö*. Ympäristön oletetaan siis aina olevan avoin joukko.

Peite. Indeksöity perhe $(U_j)_{j \in J}$ avaruuden X osajoukkoja on avaruuden X *peite*, jos kaikkien joukkojen U_j yhdiste on koko X. Jos kaikki joukot U_j ovat avaruuden X avoimia osajoukkoja, niin $(U_j)_{j \in J}$ on avaruuden X *avoin peite*.

Joukko $\mathcal{A}$ avaruuden X osajoukkoja on X:n peite, jos $\bigcup \mathcal{A} = X$. Jos $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, missä myös $\mathcal{A}'$ on avaruuden X peite, niin sanotaan, että $\mathcal{A}'$ on peitteen $\mathcal{A}$ *osapeite*.

Kompakti avaruus. Avaruus X on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite, joka peittää avaruuden X. Joukko $A \subset X$ on kompakti, jos se on kompakti topologinen avaruus relatiivitopologiassa.

Tihennys. Avaruuden X peite $(V_k)_{k \in K}$ on peitteen $(U_j)_{j \in J}$ *tihennys*, jos jokainen V_k sisältyy johonkin joukoista U_j.

Lokaalinen äärellisyys. Avaruuden X perhe $(A_j)_{j \in J}$ on *lokaalisti äärellinen*, jos kaikilla pisteillä $x \in X$ on ympäristö, joka kohtaa joukon A_j vain äärellisen monella $j \in J$.

Pisteäärellisyys. Avaruuden X perhe $(A_j)_{j\in J}$ on *pisteäärellinen*, jos kaikille $x \in X$ pätee, että $x \in A_j$ vain äärellisen monella $j \in J$.

Huomautus. Jokainen lokaalisti äärellinen joukkoperhe on myös pisteäärellinen.

Seuraavat kaksi lemmaa osoittavat lokaalisti äärellisten perheiden joitakin ominaisuuksia:

Lemma 1. *Jos $(A_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen perhe avaruudessa X, niin myös perhe $(\overline{A_j})_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen.*

Todistus. Olkoon $a \in X$ ja U pisteen a (avoin) ympäristö, joka leikkaa vain äärellisen monta joukkoa A_j, eli $U \cap A_j \neq \phi$ vain äärellisen monella $j \in J$. Tällöin $U \cap \overline{A_j} \neq \phi$ samoilla, äärellisen monella indeksillä j, joten perhe $(\overline{A_j})_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen.

□

Lemma 2. *Jos $(A_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen perhe, niin $\bigcup \overline{A_j} = \overline{\bigcup A_j}$. Erityisesti, jos $(A_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen perhe suljettuja joukkoja, niin yhdiste $\bigcup_{j\in J} A_j$ on suljettu.*

Todistus. Aina pätee, että $\bigcup \overline{A_j} \subset \overline{\bigcup A_j}$. Olkoon nyt $p \in \overline{\bigcup A_j}$. Pisteellä p on tällöin olemassa ympäristö U, joka kohtaa vain äärellisen monta joukoista A_j, sillä $(A_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen perhe. Merkitään näitä joukkoja $A_{j_1}, \ldots, A_{j_n}$, missä $n \in \mathbb{N}$. Koska $p \in \overline{\bigcup A_j}$, sulkeuman määritelmän mukaan jokainen pisteen p ympäristö kohtaa joukon $\bigcup A_j$, jolloin jokaisen pisteen p ympäristön on myös kohdattava joukko $A_{j_1} \cup \cdots \cup A_{j_n}$. Täten p kuuluu joukkoon $\overline{A_{j_1} \cup \cdots \cup A_{j_n}} = \overline{A_{j_1}} \cup \cdots \cup \overline{A_{j_n}}$, eli $p \in \overline{A_{j_k}}$ jollakin $k \in \{1, \ldots, n\}$. Siten $p \in \bigcup \overline{A_j}$, joten $\overline{\bigcup A_j} \subset \bigcup \overline{A_j}$.

□

Luku 3

Parakompakti avaruus

Tässä kappaleessa esitetään parakompaktin avaruuden määritelmä ja käsitellään muutama esimerkki. Muun muassa todistetaan seuraavat perusominaisuudet: Kompakti avaruus on parakompakti ja parakompakti Hausdorffin avaruus on normaali. Lisäksi parakompaktin avaruuden suljettu osajoukko on parakompakti.

Määritelmä. Avaruus X on *parakompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä $(U_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen avoin tihennys $(V_k)_{k\in K}$, joka peittää avaruuden X.

Joissakin lähteissä parakompaktin avaruuden määritelmään sisällytetään ehto, että avaruuden on oltava Hausdorff. Tässä ei kuitenkaan tehdä niin.

Esimerkki 1. Avaruus $\mathbb{R}^n$ on parakompakti: Olkoon $X = \mathbb{R}^n$ ja olkoon $(U_j)_{j\in J}$ avaruuden X avoin peite. Olkoon $B_0 = \phi$ ja $B_m = B(\overline{0}, m)$ avoin kuula, jonka keskipiste on origo ja jonka säde on m, missä $m \in \mathbb{N}$.

Jokaista $m > 0$ kohti valitaan nyt äärellinen määrä joukkoja U_j, eli joukot $U_{j_1}, \ldots, U_{j_n}$, $n \in \mathbb{N}$, jotka peittävät kompaktin joukon $\overline{B_m}$. Olkoon

$$V_k = U_{j_k} \cap (X \setminus \overline{B_{m-1}}),$$

kaikilla $k \in \{1, \ldots, n\}$ ja merkitään $\mathcal{A}_m = \{V_k : k \in \{1, \ldots, n\}\}$. Tällöin $\mathcal{A} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_m$ on peitteen $(U_j)_{j\in J}$ tihennys. $\mathcal{A}$ on lokaalisti äärellinen, sillä kuula B_m kohtaa vain äärellisen monta peitteen $\mathcal{A}$ alkiota, nimittäin vain ne alkiot, jotka kuuluvat joukkoperheeseen $\mathcal{A}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_m$ ja jokainen joukoista $\mathcal{A}_k$ sisältää vain äärellisen monta alkiota. Huomaa, että kuula B_m ei leikkaa koskaan perheeseen $\mathcal{A}_{m+1}$ kuuluvia joukkoja, sillä ne ovat muotoa $U \cap (X \setminus \overline{B_m})$. Lisäksi $\mathcal{A}$ peittää avaruuden X, sillä jos $x \in X$, niin valitaan pienin $m \in \mathbb{N}$, jolla $x \in \overline{B_m}$, jolloin seuraa, että x kuuluu johonkin perheen $\mathcal{A}_m$ joukoista.

Esimerkin tulos seuraa myös lauseesta 8, jonka mukaan jokainen metristyvä avaruus on parakompakti.

Lause 3. *Jokainen kompakti avaruus on parakompakti.*

Todistus. Kompaktiuden määritelmä voidaan lausua myös seuraavasti:

> Avaruus X on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä $(U_j)_{j\in J}$ on äärellinen (avoin) tihennys $(V_k)_{k\in K}$, joka peittää avaruuden X.

Tämä on yhtäpitävä perinteisen määritelmän kanssa, sillä tihennyksen $(V_k)_{k\in K}$ jokaiselle joukolle V_k voidaan valita peitteen $(U_j)_{j\in J}$ joukko U_j, joka sisältää joukon V_k. Näin saadaan peitteen $(U_j)_{j\in J}$ äärellinen osapeite.

Selvästi jokainen äärellinen tihennys on myös lokaalisti äärellinen, joten saadaan, että kompakti avaruus on aina myös parakompakti.

□

Huomautus. Tulos ei kuitenkaan päde käänteiseen suuntaan. On nimittäin olemassa parakompakteja avaruuksia, jotka eivät ole kompakteja. Tämän osoittaa myös esimerkki 1.

Säännöllinen ja normaali avaruus. Kertauksen vuoksi tässä vielä säännöllisen avaruuden ja normaalin avaruuden määritelmät:

Avaruus X on *säännöllinen*, jos se toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

1. Jos $a, b \in X$, $a \neq b$, niin kummallakin pisteellä a ja b on ympäristö, johon toinen ei kuulu. (Ehto T_1).
2. Jos $a \in X$, B on avaruuden X suljettu osajoukko ja $a \notin B$, niin pisteellä a ja joukolla B on erilliset ympäristöt. (Ehto T_3).

Avaruus X on *normaali*, jos se toteuttaa ehdon (1) lisäksi vielä seuraavan ehdon:

(3) Jos A ja B ovat erillisiä ja suljettuja avaruuden X osajoukkoja, niin joukoilla A ja B on erilliset ympäristöt. (Ehto T_4).

Muistutus. Ehto T_2 on Hausdorffin ehto ja se toteutuu, jos avaruuden eri pisteillä on erilliset ympäristöt.

Lause 4. *Jokainen parakompakti Hausdorffin avaruus on normaali.*

Todistus. Ehto T_1 on Hausdorffin avaruudessa automaattisesti voimassa. Todistetaan sitten, että parakompakti Hausdorffin avaruus X toteuttaa ehdon T_3. Olkoon $a \in X$ ja B sellainen avaruuden X suljettu osajoukko, että $a \notin B$. Koska X on Hausdorff, jokaisella $b \in B$ on sellainen ympäristö U_b jolle pätee, että $a \notin \overline{U_b}$. Olkoon $(U_j)_{j\in J}$ se avaruuden X peite, joka koostuu (avoimista) ympäristöistä U_b sekä joukosta $X \setminus B$. Peitteellä $(U_j)_{j\in J}$ on olemassa lokaalisti äärellinen avoin tihennys $(V_k)_{k\in K}$, sillä X on parakompakti. Olkoon nyt $(V_i)_{i\in I}$ se peitteen $(V_k)_{k\in K}$ osaperhe, joka sisältää kaikki ne perheen $(V_k)_{k\in K}$ alkiot, jotka leikkaavat joukkoa B. Näin $(V_i)_{i\in I}$ peittää joukon B. Lisäksi kaikille $i \in I$ pätee, että $a \notin \overline{V_i}$, koska V_i leikkaa joukkoa B, sen on oltava jonkin joukon U_b osajoukko, jonka sulkeumaan a ei kuulu.

Olkoon
$$V = \bigcup_{i\in I} V_i,$$
jolloin V on avoin avaruuden X osajoukko, joka sisältää joukon B. Koska $(V_i)_{i\in I}$ on lokaalisti äärellinen pätee lemman 2 nojalla, että
$$\overline{V} = \bigcup_{i\in I} \overline{V_i}.$$
Koska $a \notin \overline{V_i}$ kaikilla $i \in I$, on $a \notin \overline{V}$. Täten pisteellä a ja suljetulla joukolla B on olemassa erilliset ympäristöt. Siten X toteuttaa ehdon T_3.

Samalla periaatteella todistetaan, että X toteuttaa ehdon T_4: Olkoot A ja B erillisiä, suljettuja avaruuden X osajoukkoja. Koska X on säännöllinen, jokaiselle $b \in B$ löytyy ympäristö U_b, jonka sulkeuma ei leikkaa joukkoa A. Olkoon taas $(U_j)_{j\in J}$ se avaruuden X peite, jonka muodostavat joukot U_b ja avoin joukko $X \setminus B$. Avaruus X on parakompakti, joten peitteellä $(U_j)_{j\in J}$ on olemassa lokaalisti äärellinen avoin tihennys $(V_k)_{k\in K}$. Kuten edellä, merkitään kirjaimilla $(V_i)_{i\in I}$ sitä peitteen $(V_k)_{k\in K}$ osaperhettä, joka sisältää kaikki ne joukkoperheen $(V_k)_{k\in K}$ alkiot, jotka leikkaavat joukkoa B. Joukkoperhe $(V_i)_{i\in I}$ peittää joukon B ja kaikilla $i \in I$ pätee jälleen, että $\overline{V_i} \cap A = \phi$.

Avaruuden X avoin osajoukko $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ sisältää joukon B ja koska $(V_i)_{i\in I}$ on lokaalisti äärellinen pätee taas (lemma 2), että
$$\overline{V} = \bigcup_{i\in I} \overline{V_i}.$$

Koska A ja V_i ovat erillisiä kaikilla $i \in I$, myös A ja $\overline{V}$ ovat erillisiä. Joukoilla A ja B on siis erilliset ympäristöt, joten X toteuttaa ehdon T_4.

$\square$

Esimerkki 2. Olkoon Ω hyvin järjestetty joukko jonka suurin alkio on ω_1 ja jolla on seuraava ominaisuus: jos $\alpha \in \Omega$ ja $\alpha < \omega_1$, niin joukko $\{\beta \in \Omega : \beta \leq \alpha\}$ on numeroituva. Joukon Ω alkiot ovat ordinaaleja, ω_1 ensimmäinen ylinumeroituva ordinaali ja $\Omega_0 = \Omega \setminus \{\omega_1\}$ numeroituvien ordinaalien joukko.

Joukossa Ω on olemassa pienin alkio, jota merkitään luvulla 0. Sitä seuraavat luvut $1, 2, 3, \ldots$. Kyse on hyvin järjestetystä joukosta, joten siinä on olemassa pienin luku, joka on kaikkia luonnollisia lukuja $0, 1, 2, 3, \ldots$ suurempi. Merkitään tätä lukua kirjaimella ω_0. Se on ensimmäinen ääretön ordinaali, mutta se on kuitenkin yhä numeroituva. Luvun ω_0 jälkeen tulevat luvut $\omega_0 + 1, \omega_0 + 2, \ldots$, joita taas seuraa luku $2\omega_0$ ja myöhemmin luvut $3\omega_0, 4\omega_0, \ldots$. Saadaan siis numeroituva määrä joukon $\mathbb{N}$ kopioita:

$$0, 1, \ldots, \omega_0, \omega_0 + 1, \ldots, 2\omega_0, 2\omega_0 + 1, \ldots.$$

Kaikkia näitä lukuja seuraavat $\omega_0^2, \omega_0^3, \ldots$ ja näin voidaan jatkaa loputtomiin. Ensimmäistä ylinumeroituvaa lukua ω_1 ei itse asiassa saavuteta koskaan tällä lailla.

Väite. Avaruus Ω_0 ei ole parakompakti järjestystopologiassa.

Järjestystopologia. Olkoon $(H, \leq)$ täysin järjestetty joukko ([8], $Z.3$). Tälle joukolle H voidaan muodostaa kanta avointen välien kaltaisten joukkojen avulla. Merkitään esimerkiksi:

$$]a, b[= \{x \in H : a < x < b\}, [a, b[= \{x \in H : a \leq x < b\},$$

kun $a, b \in H$ ja $a < b$. Lisätään kaikkien muotoa $]a, b[$ olevien välien kokoelmaan välit $[m, b[$, jos joukossa H on pienin alkio m ja välit $]a, M]$, jos joukossa H on suurin alkio M. Näin saatu kokoelma muodostaa joukon H järjestystopologian kannan.([8], 2.11.2) Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}$ tavallinen topologia on järjestystopologian erikoistapaus.

Todistus. Tehdään vastaoletus eli oletetaan, että avaruus Ω_0 on parakompakti. Olkoon $(U_x)_{x \in \Omega_0}$ se avaruuden Ω_0 avoin peite, jossa

$$U_x = [0, x[$$

kaikilla $x \in \Omega_0$. Vastaoletuksen perusteella tälle peitteelle löytyy lokaalisti äärellinen avoin tihennys $(V_j)_{j\in J}$. Tihennys $(V_j)_{j\in J}$ peittää avaruuden Ω_0, joten kaikilla $\alpha \in \Omega_0$ pätee, että $\alpha \in V_j$ jollakin $j \in J$.

Olkoon nyt $\alpha \neq 0$ ja $j \in J$ sellainen, että $\alpha \in V_j$. Järjestystopologian määritelmän perusteella on olemassa sellaiset $a, b \in \Omega_0$, että $\alpha \in]a, b[\subset V_j$. Määritellään funktio $f : \Omega_0 \to \Omega_0$ valitsemalla $f(\alpha) = a$ ja $f(0) = 0$. Silloin pätee, että

$$f(\alpha) < \alpha \text{ kaikilla } \alpha \neq 0 \text{ ja }]f(\alpha), \alpha] \subset V_j \text{ jollakin } j \in J.$$

Nyt väitetään, että on olemassa $\beta_0 \in \Omega_0$, jolla on seuraavanlainen ominaisuus:

(1) kaikille $\beta \in \Omega_0$ löytyy sellainen $\alpha \geq \max\{\beta, \beta_0\}$, että $f(\alpha) \leq \beta_0$.

Tehdään vastaoletus. Oletetaan siis, että väite (1) ei ole totta. Tällöin pätee seuraava:

> Kaikilla $\beta_0 \in \Omega_0$ on olemassa sellainen β, että kaikilla $\alpha \geq \beta$ (ja erityisesti kaikilla $\alpha \geq \max\{\beta, \beta_0\}$) pätee $f(\alpha) > \beta_0$.

Määritellään nyt funktio $g : \Omega_0 \to \Omega_0$ niin, että kaikilla $\beta_0 \in \Omega_0$ pätee, että $g(\beta_0) = \beta$, missä β on pienin yllä olevan ehdon toteuttava avaruuden Ω_0 alkio. Määritellään seuraavaksi rekursiivisesti funktio $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega_0$ niin, että

$$\varphi(0) = 0 \text{ ja } \varphi(n+1) = g[\varphi(n)], \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Merkitään $\alpha_n = \varphi(n)$, jolloin saadaan numeroituva joukko $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $f(\alpha) > \alpha_n$ aina kun $\alpha \geq \alpha_{n+1}$:

> Olkoon $\alpha \geq \alpha_{n+1} = \varphi(n+1) = g[\varphi(n)] = g(\beta_0') = \beta'$, missä $\beta_0' = \varphi(n)$. Tällöin β' on pienin alkio jolle pätee, että $f(\alpha) > \beta_0' = \varphi(n) = \alpha_n$, kaikilla $\alpha \geq \beta'$.

Merkitään

$$\alpha' = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\},$$

jolloin $\alpha' \in \Omega_0$. Koska $\alpha' \geq \alpha_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin edellisen perusteella myös $f(\alpha') > \alpha_{n-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jolloin $f(\alpha') \geq \alpha'$. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä oletuksen mukaan $f(\alpha) < \alpha$ kaikilla $\alpha \in \Omega_0$. Siten ehto (1) on totta.

Tästä seuraa, että $\beta_0 + 1 \in V_j$ äärettömän monella $j \in J$. Tihennys $(V_j)_{j\in J}$ ei siten ole lokaalisti äärellinen, joten avaruus Ω_0 ei ole parakompakti.

Huomautus. Jokainen hyvin järjestetty joukko on normaali järjestystopologiassa, katso esimerkiksi Munkres [5], lause 32.4. Näin ollen avaruus Ω_0 on normaali. Täten esimerkki 2 osoittaa, että lause 4 ei päde käänteiseen suuntaan. Normaali avaruus ei siis aina ole parakompakti.

Lause 5. *Parakompaktin avaruuden suljettu osajoukko on parakompakti.*

Todistus. Olkoon A parakompaktin avaruuden X suljettu osajoukko ja olkoon $(U_j)_{j\in J}$ joukon A A-avoin peite. Jokaista U_j kohti valitaan nyt X-avoin joukko U'_j siten, että

$$U'_j \cap A = U_j.$$

Avaruudelle X saadaan tällöin peite X-avoimista joukoista $X \setminus A$ ja U'_j ($j \in J$). Koska X on parakompakti, tällä peitteellä on olemassa lokaalisti äärellinen tihennys $(V_k)_{k\in K}$, joka peittää avaruuden X. Joukot

$$V'_k = V_k \cap A$$

ovat A-avoimia ja muodostavat siten etsimämme joukon A peitten $(U_j)_{j\in J}$ lokaalisti äärellisen tihennyksen. Tästä seuraa, että A on parakompakti.

□

Esimerkki 3. Hausdorffin avaruuden parakompakti osajoukko ei kuitenkaan ole aina suljettu, jonka osoittaa seuraava esimerkki:

Avoin väli $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ on parakompakti, sillä se on homeomorfinen parakompaktin avaruuden $\mathbb{R}$ kanssa, mutta se ei ole suljettu avaruudessa $\mathbb{R}$.

Esimerkki 4. Esimerkin 2 ordinaalien joukko Ω on kompakti (Willard [9], luku 6, esimerkki 17.2.c.), joten se on myös parakompakti (lause 3). Kuten esimerkissä 2 osoitettiin, tämän joukon avoin osajoukko Ω_0 ei ole parakompakti. Parakompaktin avaruuden osajoukko ei siis aina ole parakompakti.

Esimerkki 5. Kahden parakompaktin avaruuden tulo ei välttämättä ole parakompakti:

Olkoon $X = \mathbb{R}$ reaaliakseli, jossa on puoliavointen välien topologia (eli topologia, jonka kantana ovat välit $[a, b[, a < b \in \mathbb{R}$). Avaruus X on parakompakti, koska se on säännöllinen ja Lindelöf (lause 9). Silti avaruus $X \times X$ ei ole parakompakti, sillä se on Hausdorff mutta ei normaali (Munkres [5], kappale 31, esimerkki 3).

Luku 4

Metristyvä avaruus ja parakompaktius

Tämän kappaleen keskipisteenä on A.H. Stonen vuonna 1948 todistama metristyvyyslause joka osoittaa, että metristyvä avaruus on parakompakti. Tämä lause vahvistaa vielä parakompaktin avaruuden tärkeyttä topologiassa.

Määritelmä. Joukko $\mathcal{A}$ avaruuden X osajoukkoja on *numeroituvasti lokaalisti äärellinen* (englanninkielisestä "*countably locally finite*"), jos $\mathcal{A}$ voidaan kirjoittaa numeroituvana yhdisteenä joukkoperheitä $\mathcal{A}_n$, joista jokainen on lokaalisti äärellinen.

Huomautus. Monissa kirjoissa käytetään termiä "*σ-lokaalisti äärellinen*" (englanniksi "*σ-locally finite*"). Kirjain σ tulee mittateoriasta ja tarkoittaa "numeroituvaa yhdistettä jostakin".

Sekä numeroituva joukko että lokaalisti äärellinen joukko ovat numeroituvasti lokaalisti äärellisiä.

Seuraavaksi todistettavassa lemmassa käytetään *hyvän järjestyksen lausetta*, joka sanoo, että jokaisessa joukossa on olemassa *hyvä järjestys* (joukon järjestys on *hyvä*, jos sen jokaisessa epätyhjässä osajoukossa on olemassa pienin alkio).

Lemma 6. *Olkoon X metristyvä avaruus ja $\mathcal{A}$ sen avoin peite. Tällöin on* *olemassa peitteen $\mathcal{A}$ avoin tihennys $\mathcal{B}$, joka on numeroituvasti lokaalisti äärellinen.*

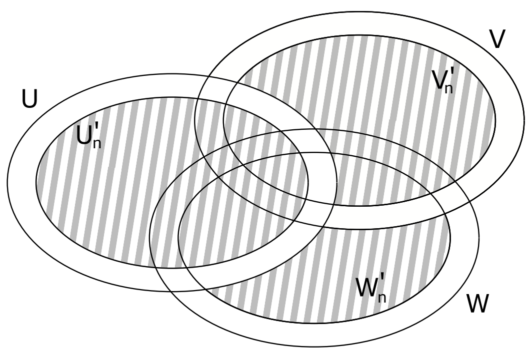
Todistus. Hyvän järjestyksen lauseen perusteella voidaan valita jokin hyvä järjestys $<$ joukkoperheelle $\mathcal{A}$. Valitaan avaruudelle X metriikka d, joka määrää avaruuden X topologian, ja kiinnitetään positiivinen kokonaisluku $n \in \mathbb{N}$. Jokaista joukkoa $U \in \mathcal{A}$ kohti määritellään nyt joukko U_n, joka saadaan supistamalla joukkoa U luvun $\frac{1}{n}$ verran, eli tarkemmin sanottuna

$$U_n = \{x \in X : B(x, \frac{1}{n}) \subset U\}.$$

Käytetään peitteen $\mathcal{A}$ hyvää järjestystä ja pienennetään yhä joukkoja U_n joukoiksi

$$U'_n = U_n \setminus \bigcup_{V<U} V,$$

missä $V \in \mathcal{A}$. Saadaan siis joukot U'_n, jotka eivät leikkaa yhtäkään joukoista V, kun $V < U$, ja väitetään, että nämä näin muodostuneet joukot ovat erillisiä.

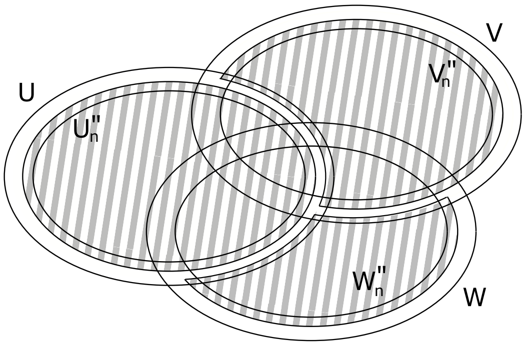


Kuva 4.1: Kuva näyttää tilanteen, jossa $U < V < W$. [5]

Oletetaan, että $x \in U'_n$ ja $y \in V'_n$, missä $U, V \in \mathcal{A}$ ja $U < V$. Koska $U'_n \subset U_n$, niin $x \in U_n$, joten $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Mutta koska $U < V$ ja $y \in V'_n$, niin joukon V'_n määritelmän perusteella $y \notin U$, joten myös $y \notin B(x, \frac{1}{n})$. Siten $d(x, y) \geq \frac{1}{n}$ aina, kun $x \in U'_n$ ja $y \in V'_n$, missä U ja V ovat peitteen $\mathcal{A}$ eri alkioita. Joukot U'_n ovat siis tosiaankin erillisiä ja ovat vähintään $\frac{1}{n}$ etäisyydellä toisistaan.

Joukot U'_n eivät kuitenkaan ole välttämättä avoimia, joten ne eivät vielä kelpaa peitteen $\mathcal{A}$ tihennykseksi. Siksi joukkoja U'_n on vielä suurennettava hieman.

Olkoon U''_n se joukko, joka saadaan yhdisteenä kaikista kuulista $B(x, \frac{1}{3n})$, missä $x \in U'_n$. Tällöin U''_n on joukon U'_n $\frac{1}{3n}$-ympäristö. Jokainen joukko U''_n on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin.



Kuva 4.2: Kuva esittää joukot jälleen tilanteessa $U < V < W$. [5]

Edellä nähtiin, että kaikilla peitteen $\mathcal{A}$ eri joukoilla U ja V, joukkojen U'_n ja V'_n etäisyys toisistaan on vähintään $\frac{1}{n}$, eli $d(U'_n, V'_n) \geq \frac{1}{n}$. Olkoon nyt $x \in U''_n$, jolloin joukon U''_n määritelmän mukaan $d(U'_n, x) \leq \frac{1}{3n}$. Samoin saadaan kaikille $y \in V''_n$, että $d(y, V'_n) \leq \frac{1}{3n}$, josta edelleen, kolmioepäyhtälöä käyttäen seuraa

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\leq d(U'_n, V'_n) \\ &\leq d(U'_n, x) + d(x, y) + d(y, V'_n) \\ &\leq \frac{1}{3n} + d(x, y) + \frac{1}{3n} \end{aligned}$$

ja siis

$$\frac{1}{3n} \leq d(x, y).$$

Siten joukot U''_n ovat erillisiä. Tarkemmin, ne ovat vähintään $\frac{1}{3n}$ etäisyydellä toisistaan. Lisäksi kaikilla $U \in \mathcal{A}$ pätee, että $U''_n \subset U$. Sillä jos $x \in U''_n$, niin $d(x, U'_n) \leq \frac{1}{3n}$, koska U''_n on joukon U'_n $\frac{1}{3n}$-ympäristö. Tällöin pätee myös, että

$d(x, U_n) \leq \frac{1}{3n}$, sillä $U'_n \subset U_n$. Nyt selvästi $x \in U$, joka sisältää joukon U_n $\frac{1}{n}$-ympäristön.

Merkitään

$$\mathcal{B}_n = \{U''_n : U \in \mathcal{A}\}.$$

Joukkoperhe $\mathcal{B}_n$ on lokaalisti äärellinen, sillä joukot U''_n ovat erillisiä ja vähintään $\frac{1}{3n}$ etäisyydellä toisistaan, joten kaikilla $x \in X$ pisteen x ympäristö $B(x, \frac{1}{6n})$ leikkaa korkeintaan yhtä joukoista U''_n.

Perhe $\mathcal{B}_n$ ei tietenkään peitä avaruutta X, joten siirrytään tarkastelemaan joukkoperhettä

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n.$$

Olkoon $x \in X$. Joukko $\mathcal{A}$ on avaruuden X peite, joten voidaan valita hyvän järjestyksen $<$ ensimmäinen alkio $U \in \mathcal{A}$, joka sisältää pisteen x. Joukko U on avoin, joten on olemassa pisteen x avoin ympäristö, joka sisältyy joukkoon U. Voidaan siis valita sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Tällöin joukon U_n määritelmän perusteella $x \in U_n$. Joukko U on peitteen $\mathcal{A}$ ensimmäinen alkio, joka sisältää pisteen x, joten $x \in U'_n$ ja koska $U'_n \subset U''_n$, niin $x \in U''_n \in \mathcal{B}_n$. Siten $\mathcal{B}$ peittää avaruuden X.

Joukot U''_n ovat avoimia ja $U''_n \subset U$ kaikilla $U \in \mathcal{A}$, joten $\mathcal{B}$ on peitteen $\mathcal{A}$ avoin tihennys. Tihennys $\mathcal{B}$ on numeroituva yhdiste lokaalisti äärellisistä joukoista, joten se on numeroituvasti lokaalisti äärellinen.

□

Metristyvyyslauseen todistukseen tarvitsemme seuraavaa E. Michaelin lemmaa. Siitä tulee olemaan hyötyä jatkossakin.

Lemma 7. *(E. Michael) Olkoon X säännöllinen avaruus. Tällöin seuravat ehdot ovat yhtäpitävät:*

1. *Avaruuden X jokaisella avoimella peitteellä on numeroituvasti lokaalisti äärellinen avoin tihennys.*
2. *Avaruuden X jokaisella avoimella peitteellä on lokaalisti äärellinen tihennys (jonka ei tarvitse olla avoin).*
3. *Avaruuden X jokaisella avoimella peitteellä on lokaalisti äärellinen suljettu tihennys.*
4. *Avaruus X on parakompakti.*

Huomautus. Avaruuden X säännöllisyyttä tarvitaan itse asiassa ainoastaan implikaation (2) $\Rightarrow$ (3) todistuksessa:

Todistus. Edellä jo todettiin, että lokaalisti äärellinen joukkoperhe on myös numeroituvasti lokaalisti äärellinen, joten (4) $\Rightarrow$ (1) on selvästi totta. Todistettaviksi jäävät siis askeleet (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4).

(1) $\Rightarrow$ (2): Olkoon $\mathcal{A}$ avaruuden X avoin peite. Oletuksen (1) mukaan on olemassa peitteen $\mathcal{A}$ avoin tihennys $\mathcal{B}$, joka on numeroituvasti lokaalisti äärellinen. Voidaan siis kirjoittaa, että $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, missä jokainen $\mathcal{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$, on lokaalisti äärellinen. Olkoon nyt V_m, $m \in \mathbb{N}$, kaikkien joukkojen $U \in \mathcal{B}_m$ yhdiste, toisin sanoen

$$V_m = \bigcup_{U\in\mathcal{B}_m} U.$$

Seuraavaksi määritellään jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja jokaiselle $U \in \mathcal{B}_n$ joukko

$$U_n = U \setminus \bigcup_{m<n} V_m.$$

Tällöin kaikilla $U \in \mathcal{B}_n$ on $U_n \subset U$. Joukot U_n eivät välttämättä ole avoimia eivätkä suljettuja, mutta sitä niiden ei tarvitsekaan olla.

Merkitään

$$\mathcal{C}_n = \{U_n : U \in \mathcal{B}_n\}$$

ja väitetään, että $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ on etsimämme peitteen $\mathcal{A}$ lokaalisti äärellinen tihennys.

Ensimmäisenä todistetaan, että $\mathcal{C}$ todellakin peittää avaruuden X. Olkoon $x \in X$. Oletuksen (1) mukaan $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ peittää avaruuden X, joten voidaan valita pienin sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $x \in U$ jollakin $U \in \mathcal{B}_m$. Koska $x \notin \mathcal{B}_i$, kun $i < m$, niin $x \in U_m \in \mathcal{C}$. Siten $\mathcal{C}$ tosiaankin on avaruuden X peite.

Nyt on vielä todistettava, että jokaisella pisteellä $x \in X$ on ympäristö, joka leikkaa vain äärellisen monta joukkoa U_n. Koska jokainen joukkoperhe $\mathcal{B}_n$ on lokaalisti äärellinen, niin jokaista kokonaislukua $n \in \{1, \ldots, m\}$, missä m on taas pienin kokonaisluku, jolle $x \in U$ jollakin $U \in \mathcal{B}_m$, kohti voidaan valita pisteen x ympäristö W_n, joka leikkaa vain äärellisen monta perheen $\mathcal{B}_n$ alkiota. Tällöin W_n leikkaa myös vain äärellisen monta joukkoperheen $\mathcal{C}_n$

alkiota. Kaikilla $V \in \mathcal{B}_n$ pätee nimittäin, että jos $W_n \cap V_n \neq \emptyset$ ($V_n \in \mathcal{C}_n$), niin myös $W_n \cap V \neq \emptyset$ ($V \in \mathcal{B}_n$), koska $V_n \subset V$. Lisäksi $U \in \mathcal{B}_m$, joten joukon U_n määritelmän perusteella $U \cap U_n = \emptyset$ kaikilla $n > m$. Pisteelle x löytyy siis ympäristö

$$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_m \cap U,$$

joka leikkaa vain äärellisen monta joukkoperheen $\mathcal{C}$ alkiota; joukot W_n ovat pisteen x ympäristöinä avoimia kuten on avoin myös joukko U, joka on avoimen peitteen $\mathcal{B}$ alkio. Joukkoperhe $\mathcal{C}$ on siten lokaalisti äärellinen avaruuden X peite ja koska $U_n \subset U$ kaikilla $U \in \mathcal{B}_n$, $\mathcal{C}$ on etsimämme peitteen $\mathcal{A}$ tihennys.

(2) $\Rightarrow$ (3): Olkoon $\mathcal{A}$ avaruuden X avoin peite. Jokaiselle pisteelle $x \in X$ valitaan nyt sellainen joukko $U \in \mathcal{A}$, että $x \in U$. Avaruus X on säännöllinen, joten suljetulla joukolla $X \setminus U$ ja pisteellä x on erilliset ympäristöt. Toisin sanoen, pisteelle x voidaan valita sellainen ympäristö V, että $\overline{V} \subset U$. Merkitään kaikkien näiden joukkojen V kokoelmaa kirjaimella $\mathcal{B}$. Joukkoperhe $\mathcal{B}$ on avaruuden X avoin peite, jolla oletuksen (2) mukaan on olemassa lokaalisti äärellinen tihennys $\mathcal{C} = (C_j)_{j \in J}$. Lemman 1 mukaan tällöin myös joukkoperhe $(\overline{C}_j)_{j \in J}$ on lokaalisti äärellinen. Peite $\mathcal{C}$ on peitteen $\mathcal{B}$ tihennys, joten kaikille $j \in J$ pätee $C_j \subset V$ jollakin $V \in \mathcal{B}$, josta taas seuraa, että $\overline{C}_j \subset \overline{V} \subset U$ jollakin $U \in \mathcal{A}$. Siten peite $(\overline{C}_j)_{j \in J}$ on peitteen $\mathcal{A}$ lokaalisti äärellinen suljettu tihennys.

(3) $\Rightarrow$ (4): Olkoon $\mathcal{A}$ avaruuden X avoin peite. Oletuksen (3) mukaan peitteellä $\mathcal{A}$ on lokaalisti äärellinen suljettu tihennys $\mathcal{B}$. Tarkoituksena on suurentaa joukoja $B \in \mathcal{B}$ avoimiksi joukoiksi. Uusien joukkojen on kuitenkin oltava tarpeeksi pieniä, jotta niistä muodostuva uusi peite olisi yhä lokaalisti äärellinen peitteen $\mathcal{A}$ tihennys.

Peite $\mathcal{B}$ on lokaalisti äärellinen, joten jokaiselle pisteelle $x \in X$ löytyy ympäristö, joka leikkaa vain äärellisen monta joukkoa $B \in \mathcal{B}$. Joukkoperhe, joka koostuu kaikista avaruuden X avoimista joukoista, jotka leikkaavat vain äärellisen monta joukkoa $B \in \mathcal{B}$, on siten myös avaruuden X peite. Oletuksen (3) mukaan tälläkin peitteellä on siis lokaalisti äärellinen suljettu tihennys $\mathcal{C}$ ja jokainen joukko $C \in \mathcal{C}$ leikkaa vain äärellisen monta joukkoa $B \in \mathcal{B}$.

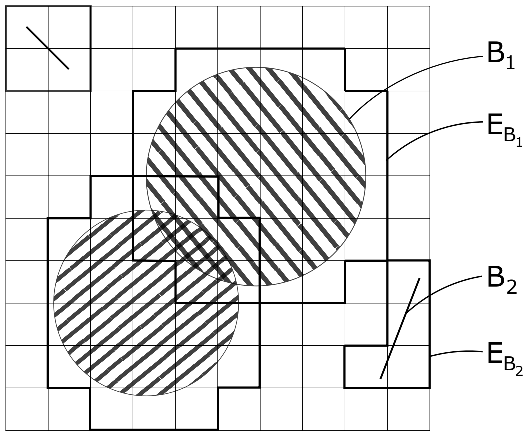
Seuraavaksi määritellään jokaista joukkoa $B \in \mathcal{B}$ kohti joukko $\mathcal{C}_B$, joka koostuu kaikista niistä joukoista $C \in \mathcal{C}$, jotka eivät kohtaa joukkoa B, siis

$$\mathcal{C}_B = \{C : C \in \mathcal{C} \text{ ja } C \subset X \setminus B\}.$$

Olkoon nyt

$$E_B = X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}_B} C.$$

Peite $\mathcal{C}$ on lokaalisti äärellinen ja kaikki joukot $C \in \mathcal{C}$ ovat suljettuja, joten lemman 2 mukaan myös yhdiste $\bigcup_{C \in \mathcal{C}_B} C$ on suljettu, josta taas seuraa, että joukot E_B ovat avoimia. Lisäksi kaikille joukoille $B \in \mathcal{B}$ pätee, että $B \subset E_B$, sillä joukkoperheen $\mathcal{C}_B$ määritelmän mukaan $B \cap \bigcup_{C \in \mathcal{C}_B} C = \emptyset$.



Kuva 4.3: Yllä olevassa kuvassa joukot B kuvataan suljettuina ympyröinä tai janoina ja joukot C suljettuina neliöinä. [5]

Koska joukkojen E_B muodostama joukkoperhe ei välttämättä ole peitteen $\mathcal{A}$ tihennys, joukkoja on pienennettävä hiukan. Siihen tarkoitukseen valitaan jokaiselle joukolle $B \in \mathcal{B}$ sellainen peitteen $\mathcal{A}$ alkio A_B, että $B \subset A_B$ ja merkitään

$$\mathcal{D} = \{E_B \cap A_B : B \in \mathcal{B}\}.$$

Edellä on jo todettu, että $B \subset E_B$ ja $B \subset A_B$, joten selvästi $B \subset E_B \cap A_B$, ja koska $\mathcal{B}$ peittää avaruuden X, myös $\mathcal{D}$ on avaruuden X peite. Lisäksi peite $\mathcal{D}$ on avoin, sillä joukot A_B ovat avoimen peitteen $\mathcal{A}$ alkioina avoimia ja myös joukot E_B ovat avoimia, joka olikin todettu jo aiemmin. Joukkoperhe $\mathcal{D}$ on siis peitteen $\mathcal{A}$ (avoin) tihennys, sillä $A_B \in \mathcal{A}$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$.

Nyt on enää todistettava, että $\mathcal{D}$ on lokaalisti äärellinen. Olkoon $x \in X$. Peite $\mathcal{C}$ on lokaalisti äärellinen, joten on olemassa pisteen x ympäristö U, joka leikkaa vain äärellisen monta joukkoa $C \in \mathcal{C}$, joita merkitään kirjaimilla $C_1, \dots, C_n$, missä $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että U kohtaa vain äärellisen monta peitteen $\mathcal{D}$ joukkoa. Joukkoperhe $\mathcal{C}$ on avaruuden X peite, joten joukot $C_1, \dots, C_n$ peittävät ympäristön U. Riittää siis osoittaa, että jokainen $C \in \mathcal{C}$ leikkaa vain äärellisen monta peitteen $\mathcal{D}$ joukkoa.

Jos $C \cap (E_B \cap A_B) \neq \emptyset$, niin myös $C \cap E_B \neq \emptyset$, jolloin joukon E_B määritelmän perusteella $C \notin \mathcal{C}_B$, eli C ei ole joukon $X \setminus B$ osajoukko. Siten

$C \cap B \neq \emptyset$. Edellä on jo näytetty, että kaikilla $C \in \mathcal{C}$ on $C \cap B \neq \emptyset$ vain äärellisen monella joukolla $B \in \mathcal{B}$, joten myös $C \cap (E_B \cap A_B) \neq \emptyset$ pätee vain äärellisen monella joukolla $E_B \cap A_B$. Siten peite $\mathcal{D}$ on tosiaankin lokaalisti äärellinen ja avaruus X on parakompakti.

□

Lause 8. *(A.H. Stone) Metristyvä avaruus on parakompakti.*

Todistus. Olkoon X metristyvä avaruus ja $\mathcal{A}$ sen avoin peite. Tällöin peitteellä $\mathcal{A}$ on lemman 6 mukaan numeroituvasti lokaalisti äärellinen avoin tihennys ja koska metristyvä avaruus on säännöllinen, niin lemmasta 7 seuraa, että X on parakompakti avaruus.

□

Huomautus. Tätä A. H. Stonen lausetta käyttivät hyväkseen matemaatikot R. H. Bing, J. Nagata ja J. M. Smirnov, jotka löysivät riippumatta toisistaan vihdoinkin vastauksen kysymykseen siitä, mitkä topologiset avaruudet ovat metristyviä. Nagata-Smirnovin metristyvyyslauseena tunnettu lause sanoo, että topologinen avaruus X on metristyvä, jos ja vain jos se on säännöllinen, Hausdorff ja sillä on numeroituvasti lokaalisti äärellinen kanta. Katso esimerkiksi Dugundji [1], kappale IX, lause 9.1.

Tätä edelleen käyttäen Smirnov todisti seurauksen, joka tunnetaan Smirnovin metristyvyyslauseena ja joka todistaa, että topologinen avaruus on metristyvä jos ja vain jos se on parakompakti Hausdorffin avaruus, joka on lokaalisti metristyvä. Katso esimerkiksi Munkres [5], kappale 6, luku 42.

Luku 5

Lindelöfin avaruus

Ernst Leonard Lindelöf (7. 3. 1870 – 4. 6. 1946) oli suomalainen matemaatikko, joka toimi Helsingin yliopiston matematiikan professorina vuosina 1903–1938. Hän oli funktioteorian ja differentiaaliyhtälöiden tutkija ja perusti maailmalla tunnetun suomalaisen funktioteorian koulukunnan. Vuonna 1903 hän todisti, että jokaisella avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimella peitteellä on numeroituva osapeite. Tästä johtuen P. Alexandrov ja P. Urysohn ottivat vuonna 1929 käyttöön termin "Lindelöfin avaruus", joka on yhä ainoa yleisesti käytetty topologian käsite, joka on saanut nimensä suomalaisen matemaatikon mukaan.

Määritelmä. Avaruus X on *Lindelöfin avaruus* (tai vain *Lindelöf*), jos sen jokaisella avoimella peitteellä on numeroituva osapeite.

Vuonna 1948 japanilainen matemaatikko Kiiti Morita todisti, että jokainen säännöllinen Lindelöfin avaruus on parakompakti.

Lause 9. *Jokainen säännöllinen Lindelöfin avaruus on parakompakti.*

Todistus. Olkoon X säännöllinen Lindelöfin avaruus ja olkoon $\mathcal{A}$ sen avoin peite. Peitteellä $\mathcal{A}$ on tällöin numeroituva osapeite, joka on selvästi numeroituvasti lokaalisti äärellinen. Siten peitteellä $\mathcal{A}$ on myös numeroituvasti lokaalisti äärellinen tihennys, joten lemmaa 7 käyttäen nähdään, että avaruus X on parakompakti.

$\square$

Luku 6

Ykkösen ositus

Yksi parakompaktin Hausdorffin avaruuden tärkeimmistä ominaisuuksista on avoimiin peitteisiin sopivien ykkösen ositusten olemassaolo.

Kantaja. Olkoon X avaruus. Jatkuvan funktion $g : X \to \mathbb{R}$ *kantaja* on joukko

$$\operatorname{spt} g = \operatorname{cl}\{x \in X : g(x) \neq 0\},$$

missä cl tarkoittaa joukon sulkeumaa ja lyhenne spt tulee englanninkielisestä sanasta "support". Nollafunktion $g(x) = 0$ kantaja on tyhjä joukko.

Määritelmä. Olkoon X avaruus. Perhe $(g_j)_{j\in J}$ jatkuvia funktioita

$$g_j : X \to [0, 1]$$

on *ykkösen ositus*, jos

1. perhe $(\operatorname{spt} g_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen ja
2. $\sum_{j\in J} g_j(x) = 1$ kaikilla $x \in X$.

Olkoon nyt $(U_j)_{j\in J}$ avaruuden X avoin peite. Sanotaan, että ykkösen ositus $(g_j)_{j\in J}$ on peitteeseen $(U_j)_{j\in J}$ *sopiva*, jos kaikilla $j \in J$ pätee, että

$$\operatorname{spt} g_j \subset U_j.$$

Ehdon (1) mukaan perhe $(\operatorname{spt} g_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen, joten kaikille $x \in X$ löytyy sellainen ympäristö U, että $\operatorname{spt} g_j \cap U \neq \emptyset$ vain äärellisen monella indeksillä $j \in J$. Siten ehdon (2) funktio $\sum_{j\in J} g_j(x)$ on äärellinen summa jatkuvista funktioista pisteen x ympäristössä U. Se on siis jatkuva jokaisen pisteen $x \in X$ ympäristössä, jolloin se on jatkuva myös koko avaruudessa X.

Lisäksi ehdosta (2) seuraa, että kaikilla $x \in X$ on $g_j(x) > 0$ jollakin $j \in J$. Siten $(\operatorname{spt} g_j)_{j \in J}$ on avaruuden X (lokaalisti äärellinen) peite.

Lemma 10. *Olkoon X parakompakti Hausdorffin avaruus ja olkoon $(U_j)_{j \in J}$ sen avoin peite. Tällöin on olemassa sellainen avaruuden X lokaalisti äärellinen avoin peite $(V_j)_{j \in J}$, että $\overline{V_j} \subset U_j$ kaikilla $j \in J$.*

Todistus. Avaruus X on parakompaktina avaruutena säännöllinen (lause 4). Jos $x \in X$ ja U on pisteen x ympäristö, niin pisteellä x on siten sellainen ympäristö V, että $\overline{V} \subset U$. Tässä riittää valita pisteelle x ja suljetulle joukolle $X \setminus U$ erilliset ympäristöt V ja W.

Olkoon $\mathcal{A}$ kaikkien niiden avointen joukkojen A kokelma, joille $\overline{A} \subset U_j$ jollakin $j \in J$. Edellä sanotun perusteella $\mathcal{A}$ on avaruuden X avoin peite. Avaruus X on parakompakti, joten peitteellä $\mathcal{A}$ on lokaalisti äärellinen avoin tihennys $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$. Koska $\mathcal{B}$ on peitteen $\mathcal{A}$ tihennys, voidaan määritellä funktio $f : I \to J$ valitsemalla jokaista $i \in I$ kohti sellainen $f(i) \in J$, että

$$\overline{B_i} \subset U_{f(i)}.$$

Merkitään $\mathcal{B}_j = \{B_i : f(i) = j\}$ ja määritellään kaikille $j \in J$ joukko V_j asettamalla

$$V_j = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}_j} B_i.$$

Joukko V_j on tyhjä, jos ei ole olemassa sellaista indeksiä i, jolle $f(i) = j$. Jokaiselle joukolle $B_i \in \mathcal{B}_j$ pätee (joukkojen määritelmien perusteella), että $\overline{B_i} \subset U_j$. Koska joukkoperhe $\mathcal{B}_j$ on lokaalisti äärellinen, niin lemman 2 perusteella

$$\overline{V}_j = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}_j} \overline{B_i},$$

joten $\overline{V}_j \subset U_j$ kaikilla $j \in J$.

Nyt on enää todistettava, että joukkoperhe $(V_j)_{j \in J}$ on lokaalisti äärellinen. Olkoon $x \in X$. Peite $\mathcal{B}$ on lokaalisti äärellinen, joten pisteelle x voidaan valita ympäristö W, joka leikkaa vain äärellisen monta joukkoa B_i. Merkitään näiden joukkojen indeksejä $i_1, i_2, \ldots, i_n$, missä $n \in \mathbb{N}$. Mutta tällöin joukko W leikkaa myös vain äärellisen monta joukkoa V_j, nimittäin joukkoja $V_{f(i_1)}, V_{f(i_2)}, \ldots, V_{f(i_n)}$, joten $(V_j)_{j \in J}$ on tosiaankin lokaalisti äärellinen. $\square$

Urysonin lemma. Olkoon X T_4-avaruus ja olkoot $A, B \subset X$ erillisiä suljettuja joukkoja. Tällöin on olemassa sellainen jatkuva kuvaus

$$f : X \to [0,1],$$

että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in A$ ja $f(x) = 1$ kaikilla $x \in B$.

Huomautuksia. 1. Urysonin lemman todistus löytyy esimerkiksi Jussi Väisälän kirjasta "Topologia II" [8]

2. Lemmassa välin $[0,1]$ voi korvata millä tahansa suljetulla välillä $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Lause 11. *Olkoon X parakompakti Hausdorffin avaruus ja olkoon $(U_j)_{j\in J}$ sen avoin peite. Tällöin on olemassa peitteeseen $(U_j)_{j\in J}$ sopiva ykkösen ositus.*

Todistus. Aloitetaan todistus käyttämällä lemmaa 10 kahdesti. Olkoot siis $(V_j)_{j\in J}$ ja $(W_j)_{j\in J}$ sellaiset lokaalisti äärelliset avaruuden X avoimet peitteet, että

$$\overline{W}_j \subset V_j \text{ ja } \overline{V}_j \subset U_j$$

kaikilla $j \in J$. Avaruus X on normaali (lause 4), joten jokaiselle $j \in J$ voidaan Urysonin lemman mukaan valita sellainen jatkuva kuvaus
$f_j : X \to [0,1]$, että

$$f_j(\overline{W}_j) = \{1\} \quad \text{ja} \quad f_j(X \setminus V_j) = \{0\}.$$

Koska $f_j(x) \neq 0$ vain kun $x \in V_j$, niin

$$\operatorname{spt} f_j \subset \overline{V}_j \subset U_j.$$

Peite $(V_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen, joten niin on myös joukkoperhe $(\overline{V}_j)_{j\in J}$ (lemma 1). Siten myös $(\operatorname{spt} f_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen. Lisäksi $(W_j)_{j\in J}$ on avaruuden X peite, joten kaikilla $x \in X$ on $f_j(x) > 0$ jollakin $j \in J$.

Olkoon $f : X \to [0,\infty]$ funktioiden f_j summa, eli

$$f(x) = \sum_{j\in J} f_j(x)$$

jokaiselle $x \in X$.

Jokaisella $x \in X$ on ympäristö U, joka kohtaa joukon $\operatorname{spt} f_j$ vain äärellisen monella indeksillä j. Siten myös tässä ääretön summa voidaan tulkita äärellisen monen nollasta eroavan luvun summaksi. Ympäristössä U funktio f on äärellinen summa jatkuvista funkioista. Kuvaus f on siten jatkuva jokaisen pisteen $x \in X$ ympäristössä, joten se on jatkuva koko avaruudessa X.

Lisäksi $f(x) > 0$ kaikilla $x \in X$, sillä aina pätee, että $f_j(x) > 0$ jollakin $j \in J$.

Funktiot

$$g_j = f_j/f$$

muodostavat vaaditun ykkösen osituksen:

1. perhe $(\operatorname{spt} g_j)$ on lokaalisti äärellinen, koska myös $(\operatorname{spt} f_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen.

2. $$\sum_{j\in J} g_j(x) = \sum_{j\in J} \frac{f_j(x)}{f(x)} = \frac{\sum_{j\in j} f_j(x)}{\sum_{j\in J} f_j(x)} = 1 \text{ kaikilla } x \in X.$$

Koska $g_j(x) \neq 0$ vain kun myös $f_j(x) \neq 0$, eli silloin kun $x \in V_j$, niin

$$\operatorname{spt} g_j \subset \overline{V}_j \subset U_j.$$

Siten on löydetty ykkösen ositus $(g_j)_{j\in J}$, joka on peitteeseen $(U_j)_{j\in J}$ sopiva.

$\square$

Huomautus. Ykkösen ositusta käytetään usein lokaalisti määriteltyjen kuvasten yhteen liittämiseen. Tuloksena saadaan koko avaruudessa määritelty kuvaus.

Esimerkkinä sovellus edellisestä lauseesta: Olkoon X avaruus ja kuvausperhe $(g_j)_{j\in J}$ ykkösen ositus $g_j : X \to [0,1]$. Jos $(f_j)_{j\in J}$ on perhe jatkuvia kuvauksia $f_j : X \to \mathbb{R}$, niin silloin myös ehdon $x \mapsto \sum_{j\in J} g_j(x)f_j(x)$ määräämä kuvaus $X \to \mathbb{R}$ on jatkuva.

Alhaalta ja ylhäältä puolijatkuvat kuvaukset. Olkoon X avaruus. Kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$ on *ylhäältä puolijatkuva*, jos kaikille $a \in \mathbb{R}$ pätee, että joukko $\{x \in X : f(x) < a\}$ on avoin. Jos taas joukko $\{x \in X : f(x) > a\}$ on avoin, niin kuvaus f on *alhaalta puolijatkuva*.

Lause 12. *(C.H. Dowker) Olkoon X parakompakti avaruus. Olkoot $f : X \to \mathbb{R}$ alhaalta puolijatkuva kuvaus ja $F : X \to \mathbb{R}$ ylhäältä puolijatkuva kuvaus, joille kaikilla $x \in X$ pätee, että $F(x) < f(x)$. Tällöin on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $\gamma : X \to \mathbb{R}$, että $F(x) < \gamma(x) < f(x)$ kaikilla $x \in X$.*

Todistus. Olkoon $r \in \mathbb{Q}$ ja olkoon

$$U_r = \{x \in X : F(x) < r\} \cap \{x \in X : f(x) > r\}.$$

Kuvauksien f ja F puolijatkuvuuden perusteella joukot U_r ovat avoimia. Oletetusti $F(x) < f(x)$ kaikilla $x \in X$. Jokaiselle pisteelle x löytyy siten rationaaliluku r', jolle $F(x) < r' < f(x)$. Siten perhe $(U_r)_{r\in\mathbb{Q}}$ on avaruuden X avoin peite.

Olkoon $(g_r)_{r\in\mathbb{Q}}$ peitteeseen $(U_r)_{r\in\mathbb{Q}}$ sopiva ykkösen ositus. Olkoon $\gamma : X \to \mathbb{R}$ funktio $x \mapsto \sum_{r\in\mathbb{Q}} r g_r(x)$. Osoitetaan, että tämä funktio toteuttaa halutut ehdot. Kiinnitetään $x_0 \in X$. Olkoot nyt $g_{r_1}, \ldots, g_{r_n}$ ne funktiot, joiden kantajat sisältävät pisteen x_0, eli missä $x_0 \in \operatorname{spt} g_{r_m}$ kaikilla $m \in \{1, \ldots, n\}$. Nyt $x_0 \in U_{r_1} \cap \cdots \cap U_{r_n}$ jolloin $F(x_0) < r_m < f(x_0)$ kaikilla $m \in \{1, \ldots, n\}$.

Tällöin

$$\begin{aligned}
F(x_0) &= F(x_0)\sum_{r\in\mathbb{Q}} g_r(x_0) = F(x_0)\sum_{m=1}^{n} g_{r_m}(x_0) = \sum_{m=1}^{n} F(x_0) g_{r_m}(x_0) \\
&< \sum_{m=1}^{n} r_m g_{r_m}(x_0) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} r g_r(x_0) = \gamma(x_0) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} r g_r(x_0) \\
&= \sum_{m=1}^{n} r_m g_{r_m}(x_0) < \sum_{m=1}^{n} f(x_0) g_{r_m}(x_0) = f(x_0)\sum_{m=1}^{n} g_{r_m}(x_0) \\
&= f(x_0)\sum_{r\in\mathbb{Q}} g_r(x_0) = f(x_0),
\end{aligned}$$

sillä ykkösen osituksen määritelmän perusteella $\sum_{r\in\mathbb{Q}} g_r(x_0) = 1$ ja lisäksi $\sum_{r\in\mathbb{Q}} g_r(x_0) = \sum_{m=1}^{n} g_{r_m}(x_0)$, koska $g_r(x_0) = 0$ kaikilla $r \notin \{r_1, ..., r_n\}$. On siis löydetty sellainen kuvaus $\gamma : X \to \mathbb{R}$, että $F(x) < \gamma(x) < f(x)$ kaikilla $x \in X$.

$\square$

Luku 7

Barysentrinen tihennys ja tähtitihennys

Tässä kappaleessa tarkastallaan parakompaktiutta ottaen lähtökohdaksi kaksi tihennystyyppiä, jotka eivät välttämättä ole lokaalisti äärellisiä.

Tähti. Olkoon X avaruus ja $(U_j)_{j\in J}$ sen peite. Tällöin joukon $A \subset X$ *tähti* peitteen $(U_j)_{j\in J}$ suhteen on joukko

$$\mathrm{St}(A, (U_j)_{j\in J}) = \bigcup\{U_j : A \cap U_j \neq \emptyset\},$$

missä lyhennys ”St” tulee englanninkielisestä sanasta ”Star”.

Määritelmä. Olkoon $x \in X$ ja olkoon $(U_j)_{j\in J}$ avaruuden X peite. Peite $(V_k)_{k\in K}$ on peitteen $(U_j)_{j\in J}$ *barysentrinen tihennys*, jos joukot $\mathrm{St}(x, (V_k)_{k\in K})$ muodostavat peitteen $(U_j)_{j\in J}$ tihennyksen kaikilla $x \in X$.

Kutistuva peite. Avaruuden X avoin peite $(U_j)_{j\in J}$ on *kutistuva*, jos on olemassa sellainen avaruuden X avoin peite $(V_j)_{j\in J}$, että $\overline{V}_j \subset U_j$ kaikilla $j \in J$.

Tällöin $(V_j)_{j\in J}$ on peitteen $(U_j)_{j\in J}$ *kutistus*.

Lemma 13. *Avaruus X on normaali, jos ja vain jos sen jokainen pisteäärellinen peite on kutistuva.*

Todistus."$\Rightarrow$": Oletetaan, että avaruus X on normaali. Olkoon $(U_j)_{j\in J}$ avaruuden X pisteäärellinen avoin peite. Hyvän järjestyksen lauseen mukaan joukossa J on olemassa hyvä järjestys. Hyvinjärjestetään joukko J ja merkitään $J = \{1, 2, 3, \dots, j, \dots\}$.

Määritellään transfiniittistä induktiota (katso esim. Dugundji [1], lause II.5.1) käyttäen joukkoperhe $(V_j)_{j\in J}$ seuraavalla lailla:

Olkoon
$$F_1 = X \setminus \bigcup_{j>1} U_j.$$

Tällöin $F_1 \subset U_1$, joten joukot F_1 ja $X \setminus U_1$ ovat erillisiä. Lisäksi molemmat joukot ovat suljettuja. Siten avaruuden X normaaliuden perusteella on olemassa sellainen avoin joukko V_1, että $F_1 \subset V_1$ ja $\overline{V}_1 \subset U_1$.

Olkoot $k, j, i \in J$. Oletetaan, että kaikille $k < j$ on määritelty joukko V_k, jolle $\overline{V_k} \subset U_k$ ja lisäksi joukot V_k (missä $k \leq j$) ja U_i (missä $i > j$) peittävät avaruuden X. Tällöin myös joukot V_k (kun $k < j$) ja U_i (kun $i \geq j$) peittävät avaruuden X.

Olkoon
$$F_j = X \setminus [(\bigcup_{k<j} V_k) \cup (\bigcup_{i>j} U_i)],$$

Joukko F_j on suljettu ja $F_j \subset U_j$, joten jälleen avaruuden X normaaliuden perusteella löytyy sellainen avoin joukko V_j, että $F_j \subset V_j$ ja $\overline{V}_j \subset U_j$. Joukkoperhe $(V_j)_{j\in J}$ on peitteen $(U_j)_{j\in J}$ kutistus, jos se peittää avaruuden X.

Olkoon $x \in X$. Peite $(U_j)_{j\in J}$ on pisteäärellinen, joten $x \in U_j$ vain äärellisen monella $j \in J$. Merkitään näitä joukkoja $U_{j_1}, \dots, U_{j_n}$, missä $n \in N$. Olkoon $j' = \max(j_1, \dots, j_n)$. Kaikille $i > j'$ pätee, että $x \notin U_i$. Jos siis $x \notin V_k$ kaikilla $k < j'$, niin joukon F_j määritelmän perusteella $x \in F_{j'} \subset V_{j'}$. Siten $x \in V_k$ jollakin $k \leq j'$.

Perhe $(V_j)_{j\in J}$ on siis avaruuden X peite, joten $(U_j)_{j\in J}$ on todellakin kutistuva.

"$\Leftarrow$": Olkoot nyt A ja B kaksi avaruuden X suljettua ja erillistä osajoukkoa. Nyt
$$\{X \setminus A, X \setminus B\}$$

on avaruuden X avoin, pisteäärellinen peite, joten se on oletuksen mukaan kutistuva. Siten on olemassa sellainen avaruuden X peite $\{V_1, V_2\}$, että $\overline{V}_1 \subset X \setminus A$ ja $\overline{V}_2 \subset X \setminus B$. Joukko $X \setminus \overline{V}_1$ on tällöin joukon A ympäristö ja vastaavasti $X \setminus \overline{V}_2$ on joukon B ympäristö. Nämä ympäristöt ovat erillisiä, sillä
$$(X \setminus \overline{V}_1) \cap (X \setminus \overline{V}_2) = X \setminus (\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2) = X \setminus X = \emptyset.$$

Siten avaruus X on normaali.

$\square$

Lause 14. *Olkoon X normaali avaruus ja $(U_j)_{j\in J}$ tämän lokaalisti äärellinen avoin peite. Tällöin peitteellä $(U_j)_{j\in J}$ on olemassa avoin barysentrinen tihennys.*

Todistus. Lokaalisti äärellinen peite on aina myös pisteäärellinen, joten normaalin avaruuden X peite $(U_j)_{j\in J}$ on kutistuva (lemma 13). Siten on olemassa avoin peite $(V_j)_{j\in J}$, jolla $\overline{V}_j \subset U_j$ kaikilla $j \in J$. Peite $(V_j)_{j\in J}$ on peitteen $(U_j)_{j\in J}$ tihennyksenä lokaalisti äärellinen. Määritellään nyt jokaiselle $x \in X$ joukko

$$W(x) = (\bigcap\{U_j : x \in \overline{V}_j\}) \cap (\bigcap\{\complement\overline{V}_k : x \notin \overline{V}_k\})$$

ja näytetään, että näistä joukoista koostuva perhe $\mathcal{W} = \{W(x) : x \in X\}$ on etsimämme avoin peite.
Aloitetaan tämä toteamalla, että joukko $W(x)$ on avoin kaikilla $x \in X$: Peite $(V_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen, joten jokainen joukoista $\bigcap\{U_j : x \in \overline{V}_j\}$ on avoimien joukkojen äärellisenä leikkauksena avoin. Lisäksi myös joukot $\bigcap\{\complement\overline{V}_k : x \notin \overline{V}_k\} = \complement(\bigcup\{\overline{V}_k : x \notin \overline{V}_k\})$ ovat lemman 2 mukaan avoimia. Joukot $W(x)$ ovat siten kahden avoimen joukon leikkauksina avoimia. Lisäksi kaikilla $x \in X$ pätee, että $x \in W(x)$, joten $\mathcal{W}$ on todellakin avaruuden X peite.

Kiinnitetään seuraavaksi piste $a \in X$ ja valitaan sellainen $j \in J$, että $a \in \overline{V}_j$. Nyt kaikilla pisteillä $x \in X$ joilla $a \in W(x)$ täytyy myös päteä, että $x \in \overline{V}_j$. Jos näin ei olisi, niin $W(x) \subset \complement\overline{V}_j$, mutta piste a oli valittu siten, että $a \in \overline{V}_j$ ja lisäksi $a \in W(x)$. Koska siis $x \in \overline{V}_j$, niin joukon $W(x)$ määritelmän mukaan pätee, että $W(x) \subset U_j$. Siten $\mathrm{St}(a, \mathcal{W}) \subset U_j$, joten peite $\mathcal{W}$ on peitteen $(U_j)_{j\in J}$ barysentrinen tihennys.

$\square$

Määritelmä. Olkoon jälleen $(U_j)_{j\in J}$ avaruuden X peite. Peite $(V_k)_{k\in K}$ on peitteen $(U_j)_{j\in J}$ ***tähtitihennys***, jos joukot $\mathrm{St}(V_k, (V_k)_{k\in K})$ muodostavat peitteen $(U_j)_{j\in J}$ tihennyksen.

Lemma 15. *Avaruuden X peitteen $(U_j)_{j\in J}$ barysentrisen tihennyksen $(V_k)_{k\in K}$ barysentrinen tihennys $(W_i)_{i\in I}$ on peitteen $(U_j)_{j\in J}$ tähtitihennys.*

Todistus. Olkoon $W_0 \in (W_i)_{i\in I}$. Kiinnitetään $x_0 \in W_0$ ja valitaan jokaiselle joukolle W_i, jolle pätee $W_i \cap W_0 \neq \emptyset$, sellainen $z_i \in X$, että $z_i \in W_i \cap W_0$.

Koska $z_i \in W_i \cap W_0$, niin $W_i \cup W_0 \subset \mathrm{St}(z_i, (W_i)_{i\in I})$. Lisäksi oletuksen mukaan joukot $\mathrm{St}(z_i, (W_i)_{i\in I})$ muodostavat peitteen $(V_k)_{k\in K}$ tihennyksen, joten $\mathrm{St}(z_i, (W_i)_{i\in I}) \subset V_k$ jollakin $k \in K$.

Koska $x_0 \in W_0$, niin myös $x_0 \in V_k$, jolloin

$$\mathrm{St}(W_0, (W_i)_{i\in I}) \subset \mathrm{St}(x_0, (V_k)_{k\in K}).$$

Oletuksen mukaan joukot $\mathrm{St}(x_0, (V_k)_{k\in K})$ muodostavat peitteen $(U_j)_{j\in J}$ tihennyksen, joten $\mathrm{St}(x_0, (V_k)_{k\in K}) \subset U_j$ jollakin $j \in J$. Siten

$$\mathrm{St}(W_0, (W_i)_{i\in I}) \subset U_j$$

jollakin $j \in J$, joten $(W_i)_{i\in I}$ on tosiaankin peitteen $(U_j)_{j\in J}$ tähtitihennys.

□

Huomautus. Peitteen $(U_j)_{j\in J}$ jokaisen tihennyksen barysentrinen tihennys on sammalla myös peitteen $(U_j)_{j\in J}$ barysentrinen tihennys. Siten lauseesta 14 ja lemmasta 15 seuraa, että parakompaktin Hausdorff avaruuden jokaisella peitteellä on olemassa sekä barysentrinen tihennys että tähtitihennys. Vielä tärkempi seikka on se, että tämä parakompaktin avaruuden ominaisuus ei päde ainoastaan Hausdorff avaruuksille, vaan myös T_1-avaruuksille. Tämä nähdään seuraavassa A. H. Stonen todistamassa lauseessa.

Lause 16. *Olkoon X T_1-avaruus. Tällöin X on parakompakti Hausdorffin avaruus jos ja vain jos sen jokaisella avoimella peitteellä on avoin barysentrinen tihennys.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Olkoon X parakompakti Hausdorffin avaruus ja $(U_j)_{j\in J}$ sen avoin peite. Olkoon $(V_k)_{k\in K}$ peitteen $(U_j)_{j\in J}$ lokaalisti äärellinen tihennys, joka siis on myös pisteäärellinen. Avaruus X on normaali (lause 4), joten lemman 13 mukaan $(V_k)_{k\in K}$ on kutistuva. Täten on olemassa sellainen avaruuden X peite $(W_k)_{k\in K}$, että $\overline{W}_k \subset V_k$ kaikilla $k \in K$. Myös peite $(W_k)_{k\in K}$ on lokaalisti äärellinen.

Olkoon $x \in X$ ja olkoon

$$A_x = \bigcap \{V_k : x \in \overline{W}_k\}.$$

Aina kun $x \in \overline{W}_k$, niin myös $x \in V_k$. Koska peite $(V_k)_{k\in K}$ on pisteäärellinen, niin joukko A_x on äärellinen leikkaus avoimista joukoista ja siten itsekin avoin.

Määritellään seuraavaksi joukko

$$B_x = \bigcup\{\overline{W}_k : x \notin \overline{W}_k\}.$$

Peite $(W_k)_{k\in K}$ on lokaalisti äärellinen, joten joukko B_x on suljettu (lemma 2).

Merkitään

$$C_x = A_x \setminus B_x$$

ja näytetään, että joukkoperhe $(C_x)_{x\in X}$ on haettu peitteen $(U_j)_{j\in J}$ barysentrinen tihennys:

Kiinnitetään piste $x_0 \in X$ ja valitaan sellainen $k \in K$, että $x_0 \in \overline{W}_k$. Väitetään, että $\mathrm{St}(x_0, (C_x)_{x\in X}) \subset V_k$, eli että

$$\bigcup\{C_x : x_0 \in C_x\} \subset V_k.$$

Oletetaan, että $x_0 \in C_x$. Koska $x_0 \in \overline{W}_k$, niin myös $x \in \overline{W}_k$, sillä muutoin pätisi $\overline{W}_k \subset B_x$, josta taas seuraisi $x_0 \notin C_x$. Kun $x \in \overline{W}_k$, niin $A_x \subset V_k$, joten myös $C_x \subset V_k$.

Tästä seuraa, että $\mathrm{St}(x_0, (C_x)_{x\in X}) \subset V_k$, joten $(C_x)_{x\in X}$ on peitteen $(V_k)_{k\in K}$, ja siten myös peitteen $(U_k)_{k\in K}$, barysentrinen tihennys.

"$\Leftarrow$": Oletetaan nyt, että avaruus X on T_1 ja että sen jokaisella avoimella peitteellä on avoin barysentrinen tihennys.

Osoitetaan aluksi, että avaruus X on säännöllinen. Olkoon $a \in X$ ja olkoon B sellainen avaruuden X suljettu osajoukko, että $a \notin B$. Joukot $X \setminus B$ ja $X \setminus \{a\}$ muodostavat avaruuden X avoimen peitteen. Olkoon $\mathcal{A}_1$ peitteen $\{X \setminus B, X \setminus \{a\}\}$ avoin barysentrinen tihennys ja $\mathcal{A}_2$ puolestaan peitteen $\mathcal{A}_1$ avoin barysentrinen tihennys. Tällöin $\mathcal{A}_2$ on peitteen $\{X \setminus B, X \setminus \{a\}\}$ tähtitihennys (lemma 15). Näytetään, että joukot $\mathrm{St}(a, \mathcal{A}_2)$ ja $\mathrm{St}(B, \mathcal{A}_2)$ ovat vaaditut pisteen a ja joukon B erilliset ympäristöt:

Jos joukot $\mathrm{St}(a, \mathcal{A}_2)$ ja $\mathrm{St}(B, \mathcal{A}_2)$ eivät olisi erillisiä, niin löytyisi sellaiset joukot $A, A' \in \mathcal{A}_2$, että $a \in A$ ja $B \cap A' \neq \emptyset$, mutta $A \cap A' \neq \emptyset$. Mutta tällöin joukko $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}_2)$ kohtaisi sekä joukon B että pisteen a. Tämä ei ole mahdollista, sillä joukot $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}_2)$ muodostavat peitteen $\{X \setminus B, X \setminus \{a\}\}$ tihennyksen.

Pisteellä a ja joukolla B on siten olemassa erilliset ympäristöt, joten avaruus X on säännöllinen.

Näytetään seuraavaksi, että jokaisella avaruuden X avoimella peitteellä $(U_j)_{j\in J}$ on olemassa numeroituvasti lokaalisti äärellinen avoin tihennys.

Merkitään $(U_j)_{j\in J} = \mathcal{U}$. Oletuksen mukaan avaruuden X jokaisella avoimella peitteellä on avoin barysentrinen tihennys, joten lemmasta 15 seuraa, että peitteellä $\mathcal{U}$ on olemassa tähtitihennys $\mathcal{U}^*$. Olkoot nyt $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ sellaiset avoimet avaruuden X peitteet, että $\mathcal{U}_{n+1}$ on peitteen $\mathcal{U}_n$ tähtitihennys kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja että $\mathcal{U}_0$ on peitteen $\mathcal{U}^*$ tähtitihennys. Määritellään induktiivisesti seuraavanlaiset peitteet:

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{U}_1,\ \mathcal{B}_2 = \{\mathrm{St}(V, \mathcal{U}_2) : V \in \mathcal{B}_1\}, \ldots,$$

$$\mathcal{B}_n = \{\mathrm{St}(V, \mathcal{U}_n) : V \in \mathcal{B}_{n-1}\}, \ldots$$

Jokainen $\mathcal{B}_n$ on peitteen $\mathcal{U}_0$ avoin tihennys. Itse asiassa jokainen peite $\{\mathrm{St}(V, \mathcal{U}_n) : V \in \mathcal{B}_n\}$ on peitteen $\mathcal{U}_0$ tihennys. Tämä nähdään seuraavasti:

Peitteiden määritelmän mukaan $\mathcal{B}_1$ on peitteen $\mathcal{U}_0$ avoin tihennys, joten väite pätee kun $n = 1$. Oletetaan nyt, että väite pätee kun
$n = k-1$ ja näytetään, että se pätee myös kun $n = k$. Olkoon $V = \mathrm{St}(V_0, \mathcal{U}_k)$ jollakin $V_0 \in \mathcal{B}_{k-1}$, jolloin

$$\mathrm{St}(V, \mathcal{U}_k) = \mathrm{St}\Big(\mathrm{St}(V_0, \mathcal{U}_k), \mathcal{U}_k\Big) \subset \mathrm{St}(V_0, \mathcal{U}_{k-1}),$$

koska $\mathcal{U}_k$ on peitteen $\mathcal{U}_{k-1}$ tähtitihennys. Siten, koska induktio-oletuksen mukaan $\{\mathrm{St}(V, \mathcal{U}_{k-1}) : V \in \mathcal{B}_{k-1}\}$ on peitteen $\mathcal{U}_0$ tihennys, niin myös $\{\mathrm{St}(V, \mathcal{U}_k) : V \in \mathcal{B}_k\}$ on peiteen $\mathcal{U}_0$ avoin tihennys.

Seuraavaksi hyvinjärjestetään X ja määritellään jokaiselle $x \in X$ ja jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ joukko

$$E_n(x) = \mathrm{St}(x, \mathcal{B}_n) \setminus \bigcup_{y<x} \mathrm{St}(y, \mathcal{B}_{n+1}).$$

Näytetään, että $\mathcal{E} = \{E_n(x) : x \in X \text{ ja } n \in \mathbb{N}\}$ on avaruuden X peite:
Olkoon $p \in X$. Silloin

$$A = \{y : p \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{St}(y, \mathcal{B}_i)\}$$

ei ole tyhjä, koska $p \in A$. Jos x on joukon A ensimmäinen alkio, niin $p \in \mathrm{St}(x, \mathcal{B}_n)$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi $p \notin \mathrm{St}(y, \mathcal{B}_{n+1})$ kaikilla $y < x$, joten $p \in E_n(x)$. Siten $\mathcal{E}$ peittää avaruuden X. Lisäksi, koska $\mathcal{B}_n$ on peitteen $\mathcal{U}_0$ tihennys, niin myös $\mathcal{E}$ on peitteen $\mathcal{U}^*$ tihennys.

Nyt osoitetaan, että jokainen $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ kohtaa korkeintaan yhden joukoista $E_n(x)$.

Jos $U \cap E_n(x) \neq \emptyset$, niin on olemassa sellainen $V \in \mathcal{B}_n$, että $x \in V$ ja $V \cap U \neq \emptyset$. Täten $x \in V \cup U \subset V_0 \in \mathcal{B}_{n+1}$ ja $U \subset \mathrm{St}(x, \mathcal{B}_{n+1})$. Joten, jos $E_n(x)$ on ensimmäinen joukko, joka kohtaa joukon U, niin se ei voi kohdata yhtäkään joukkoa $E_n(y)$, kun $y > x$. Siten $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ kohtaa korkeintaan yhden joukoista $E_n(x)$.

Olkoon nyt
$$W_n(x) = \mathrm{St}(E_n(x), \mathcal{U}_{n+2}).$$
Silloin $\mathcal{W} = \{W_n(x) : x \in X \text{ ja } n \in \mathbb{N}\}$ on avaruuden X avoin peite. Lisäksi $\mathcal{W}$ on peitteen $\mathcal{U}$ tihennys, koska $\mathcal{E}$ on peitteen $\mathcal{U}^*$ tihennys.

Lopuksi osoitetaan, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ joukkoperhe $\{W_n(x) : x \in X\}$ on lokaalisti äärellinen.

Jokainen joukko $U \in \mathcal{U}_{n+2}$ voi kohdata korkeintaan yhden joukoista $W_n(x)$, koska $U \cap W_n(x) \neq \emptyset$ jos ja vain jos $E_n(y) \cap \mathrm{St}(U, \mathcal{U}_{n+2}) \neq \emptyset$. Joukko $\mathrm{St}(U, \mathcal{U}_{n+2})$ sisältyy johonkin joukoista $U_0 \in \mathcal{U}_{n+1}$, joka puolestaan, kuten edellä todettu, kohtaa korkeintaan yhden joukoista $E_n(y)$. Siten joukkoperhe $\{W_n(x) : x \in X\}$ on lokaalisti äärellinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jolloin $\mathcal{W}$ on numeroituvasti lokaalisti äärellinen.

Avaruus X on säännöllinen ja sen jokaisella avoimella peitteellä on olemassa numeroituvasti lokaalisti äärellinen avoin tihennys, joten lemman 7 mukaan X on parakompakti avaruus.

$\square$

Seuraus 17. *Olkoon X T_1-avaruus. Tällöin X on parakompakti Hausdorffin avaruus jos ja vain jos sen jokaisella avoimella peitteellä on avoin tähtitihennys.*

Todistus. Tulos seuraa edellisestä lauseesta sekä lemmasta 15, jonka mukaan barysentrisen tihennyksen barysentrinen tihennys on tähtitihennys.

$\square$

Luku 8

Parakompaktiuden säilyvyys suljetussa kuvauksessa

Topologisen avaruuden ominaisuuksia tutkiessa kiinniteään usein huomio ominaisuuden säilyvyyteen avaruuden osajoukoissa, karteesisessa tulossa sekä jatkuvassa kuvauksessa. Edellä nähtiin, että parakompaktin avaruuden osajoukko ei välttämättä ole parakompakti (esimerkki 4), mutta sen suljettu osajoukko on (lause 5). Esimerkissä 5 taas huomattiin, että kahden parakompaktin avaruuden karteesinen tulo ei välttämättä ole parakompakti. Jos kumminkin tiettyjen avaruuksien tulo on parakompakti, niin silloin jokaisen niistä avaruuksista on oltava parakompakti (Dugundji [1], kappale VIII lause 2.4.(3)). Lisäksi tiedetään, että parakompaktin avaruuden ja kompaktin avaruuden karteesinen tulo on parakompakti (Engelking [2], lause 5.1.36). Tässä luvussa todistetaan, että parakompaktin avaruuden kuva jatkuvassa, suljetussa surjektiossa on myös parakompakti.

Aloitetaan todistamalla, että normaalius säilyy jatkuvassa, suljetussa surjektiossa.

Lemma 18. *Olkoon X normaali avaruus ja $f : X \to Y$ jatkuva, suljettu surjektio. Silloin avaruus Y on normaali.*

Todistus. Olkoon $A, B \subset Y$ avaruuden Y suljettuja, erillisiä osajoukkoja. Merkitään $f^{-1}(A) = C$ ja $f^{-1}(B) = D$. Funktio f on jatkuva, joten joukot C ja D ovat suljettuja avaruudessa X. Oletuksen mukaan avaruus X on normaali, joten joukoilla C ja D on erilliset (avoimet) ympäristöt $U \supset C$ ja $V \supset D$. Merkitään $E = X \setminus U$ ja $F = X \setminus V$. Suljetuille joukoille E ja F pätee tällöin, että $E \cap C = \emptyset = F \cap D$ ja $E \cup F = X$. Kuvaus f on suljettu, joten joukot $f(E)$ ja $f(F)$ ovat myös suljettuja avaruudessa Y. Joukot $Y \setminus f(E)$ ja $Y \setminus f(F)$ ovat siten avoimet. Osoitetaan, että nämä joukot ovat myös erilliset.

Tehdään vastaväite, eli oletetaan, että on olemassa $y \in [(Y \setminus f(E)) \cap (Y \setminus f(F))]$. Funktio f on surjektio, joten on on olemassa piste $x \in X$, jolle $f(x) = y$. Edellä todettiin, että $X = E \cup F$, joten joko $x \in E$ tai $x \in F$. Tästä seuraa, että joko $y \in f(E)$ tai $y \in f(F)$, joka on ristiriita, sillä oletettiin, että pätee sekä $y \in Y \setminus f(E)$ että $y \in Y \setminus f(F)$.

Joukoilla A ja B on siten avoimet, erilliset ympäristöt $Y \setminus f(E)$ ja $Y \setminus f(F)$, joten avaruus Y on normaali.

□

Lause 19. *(E. Michael) Olkoon X parakompakti Hausdorffin avaruus ja $f : X \to Y$ jatkuva suljettu surjektio. Silloin myös Y on parakompakti Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Olkoon $(U_j)_{j \in J}$ avaruuden Y avoin peite. Avaruus X on parakompaktina Hausdorffin avaruutena normaali (lause 4), joten edellisen lemman nojalla myös avaruus Y on normaali ja siten myös säännöllinen. Lemman 7 mukaan riittää osoittaa, että peitteellä $(U_j)_{j \in J}$ on numeroituvasti lokaalisti äärellinen avoin tihennys.

Joukkoperhe $(f^{-1}(U_j))_{j \in J}$ on avaruuden X avoin peite. Hyvinjärjestetään joukko J. Jokaista lukua $n \in \mathbb{N}$ kohti määritellään induktiota käyttäen avaruudelle X seuraavanlainen lokaalisti äärellinen avoin peite $(V_{n,j})_{j \in J}$:

1. $f(\overline{V}_{n,j}) \subset U_j$, kaikilla $j \in J$.
2. $f(\bigcup_{j<k} \overline{V}_{n-1,j}) \cap f(\overline{V}_{n,k}) = \emptyset$, $n > 1$.

Lemman 10 mukaan perhelle $(f^{-1}(U_j))_{j \in J}$ löytyy sellainen lokaalisti äärellinen avoin tihennys $(V_{1,j})_{j \in J}$, että $\overline{V}_{1,j} \subset f^{-1}(U_j)$ kaikilla $j \in J$. Olkoon nyt $n > 1$ ja oletetaan, että peite $(V_{i,j})_{j \in J}$ on määritelty kaikilla $i \leq n$. Olkoon $k \in J$ ja merkitään

$$W_{n,k} = U_k \setminus f(\bigcup_{j<k} \overline{V}_{n,j}).$$

Lemmaa 2 käyttäen nähdään, että $\bigcup_{j<k} \overline{V}_{n,j}$ on suljettu ja koska f on suljettu kuvaus, niin myös joukot $f(\bigcup_{j<k} \overline{V}_{n,j})$ ovat suljettuja. Siten jokainen joukko $W_{n,k}$ on avoimen ja suljetun joukon erotuksena avoin.

Seuraavaksi näytetään, että $(W_{n,j})_{j\in J}$ on avaruuden Y peite: Olkoon $y \in Y$ ja olkoon $k_0 \in J$ ensimmäinen indeksi, jolle pätee $y \in U_{k_0}$. Tällöin kaikilla $j < k_0$ pätee, että $y \notin f(\overline{V}_{n,j})$, sillä $\overline{V}_{n,j} \subset f^{-1}(U_j)$. Tällöin $y \in W_{n,k_0}$, joten joukkoperhe $(W_{n,j})_{j\in J}$ on avaruuden Y peite.

Edellisestä seuraa, että joukkoperhe $(f^{-1}(W_{n,j}))_{j\in J}$ on avaruuden X avoin peite. Siten, käyttäen jälleen lemmaa 10, nähdään, että tällä peitteellä $(f^{-1}(W_{n,j}))_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen avoin tihennys $(V_{n+1,j})_{j\in J}$, jolle pätee, että kaikilla $j \in J$ ja $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{V}_{n+1,j} \subset f^{-1}(W_{n,j}) \subset f^{-1}(U_j).$$

Tällöin $f(\overline{V}_{n+1}, k) \cap f(\overline{V}_{n,j}) = \emptyset$ aina kun $j < k$, kaikilla $j, k \in J$ ja $n \in \mathbb{N}$, sillä $f(\overline{V}_{n+1,k}) \subset W_{n,k}$, joka ei kohtaa joukkoa $f(\overline{V}_{n,j})$ silloin, kun $j < k$. Täten molemmat ehdot (1) ja (2) täyttyvät joukoille $V_{n+1,j}$.

Määritellään nyt jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja jokaiselle $j \in J$ joukko

$$A_{n,j} = Y \setminus f(\bigcup_{k\neq j} \overline{V}_{n,k}),$$

joka on selvästi avoin. Lisäksi pätee myös, että $A_{n,j} \subset f(\overline{V}_{n,j}) \subset U_j$ sekä $A_{n,j} \cap A_{n,k} = \emptyset$ aina kun $j \neq k$. Seuraavaksi vielä näytetään, että joukkoperhe $\{A_{n,j} : j \in J \text{ ja } n \in \mathbb{N}\}$ on avaruuden Y peite. Olkoon $y \in Y$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa sellainen $j \in J$, että $y \in f(\overline{V}_{n,j})$, sillä $(f(\overline{V}_{n,j}))_{j\in J}$ on avaruuden Y peite. Merkitään

$$\alpha_n = \min\{j \in J : y \in f(\overline{V}_{n,j})\}$$

ja olkoon α_m joukon $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ pienin alkio. Nyt alkion α_m määritelmän perusteella $y \notin f(\overline{V}_{m+1,k})$ kaikilla $k < \alpha_m$. Tämän lisäksi ehdon (2) mukaan pätee myös, että $y \notin f(\overline{V}_{m+1,k})$ aina kun $k > \alpha_m$. Tästä seuraa, että $y \in A_{m+1,\alpha_m}$, joten $\{A_{n,j} : j \in J \text{ ja } n \in \mathbb{N}\}$ on avaruuden Y peite.

Seuraavaksi asetetaan

$$A_n = \bigcup_{j\in J} A_{n,j}.$$

Tällöin $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on avaruuden Y avoin peite, joten joukkoperhe $(f^{-1}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ peittää avaruuden X (ja on myös avoin). Käyttäen jälleen lemmaa 10, saadaan tälle avaruuden X peitteelle lokaalisti äärellinen avoin tihennys $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolle pätee, että $f(\overline{B}_n) \subset A_n$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Avaruus Y on normaali, joten on olemassa sellainen avoin joukko $C_n \subset Y$, jolle pätee, että $f(\overline{B}_n) \subset C_n \subset \overline{C}_n \subset A_n$. Jokaiselle $j \in J$ ja jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ merkitään nyt

$$D_n = C_n \setminus \bigcup_{m<n} f(\overline{B}_m) \text{ ja } D_{n,j} = D_n \cap A_{n,j}$$

ja näytetään, että $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on avaruuden Y peite.

Olkoon $y \in Y$ ja olkoon $n \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolle pätee, että $y \in C_n$. Silloin $y \in D_n$, joten $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on avaruuden Y avoin peite. Tällöin $\{D_{n,j} : j \in J$ ja $n \in \mathbb{N}\}$ on peitteen $(U_j)_{j\in J}$ avoin tihennys, sillä $A_{n,j} \subset f(\overline{V}_{n,j}) \subset U_j$. Näytetään vielä, että tämä tihennys on numeroituvasti lokaalisti äärellinen. Edellä nähtiin, että $(A_{n,j})_{j\in J}$ on avaruuden Y avoin peite, joten myös perhe $\{A_{n,j} : j \in J\} \cup \{Y \setminus \overline{C}_n\}$ on avaruuden Y avoin peite. Joukkojen määritelmien perusteella $D_{n,j} \cap A_{n,k} = \emptyset$ kaikilla $i \neq k$ sekä $D_{n,j} \cap (Y \setminus \overline{C}_n) = \emptyset$ kaikilla $j \in J$. Siten joukkoperhe $(D_{n,j})_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Ollaan siis löydetty peitteelle $(U_j)_{j\in J}$ numeroituvasti lokaalisti äärellinen avoin tihennys, joten avaruus Y on parakompakti lemman 7 mukaan.

$\square$

Kirjallisuutta

[1] Dugundji, James: *Topology* - Allyn and Bacon, Boston, 1978

[2] Engelking, Ryszard: *General Topology* - Heldermann Verlag, Berlin, 1988

[3] Michael, Ernest: *A note on paracompact spaces* - Proc. Amer. Math. Soc. 4, 1953, 831-838

[4] Michael, Ernest: *Another note on paracompact spaces* - Proc. Amer. Math. Soc. 8, 1957, 822-828

[5] Munkres, James R.: *Topology* - Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2000

[6] Singh, Tej Bahadur: *Elements of Topology* - CRC Press, Boca Raton, Florida, 2013

[7] Väisälä, Jussi: *Topologia I* - Limes ry, Helsinki, 2002

[8] Väisälä, Jussi: *Topologia II* - Limes ry, Helsinki, 2005

[9] Willard, Stephen: *General Topology* - Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1998